ANALYSE ALGEBRE

Les deux problèmes sont obligatoires et distincts ; ils peuvent être traités dans un ordre quelconque.

PROBLEME I :

On considère la suite de fonctions réelles de la variable réelle x :

$$y_n = \frac{1}{1 + x^n}$$

$x \in [0, +\infty[$ $\quad n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 2$

1°) Etudier la variation de la fonction y_n. Tracer sa courbe représentative (C_n) dans un repère orthonormé. Déterminer les coordonnées du point d'inflexion de la courbe (C_n). Comment se déforme la courbe (C_n) quand n varie ?

2°) La suite (y_n) est-elle convergente ?

3°) Démontrer que l'intégrale

$$I_n = \int_0^{\infty} \frac{dx}{1 + x^n}$$ a un sens. Prouver que l'intégrale I_n a une limite ℓ quand n augmente indéfiniment. Comment I_n tend-elle vers cette limite ?

4°) Etudier la nature de la série de terme général $U_n = I_n - \ell$

5°) En admettant que $I_n = \frac{\frac{\pi}{n}}{\sin \frac{\pi}{n}}$, utiliser ce résultat pour retrouver la conclusion du 4°).

6°) On se propose d'établir la formule $I_n = \frac{\frac{\pi}{n}}{\sin \frac{\pi}{n}}$ en décomposant en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{1}{1 + x^n}$. Soit α_K une racine de l'équation $x^n + 1 = 0$ $\quad (0 \leqslant K \leqslant n-1)$

Montrer d'abord que $I_n = -\frac{1}{n} \sum_{K=0}^{n-1} \int_0^{\infty} \frac{\alpha_K}{x - \alpha_K} dx$

Pour la suite du calcul, on pourra être amené à utiliser la formule (que l'on établira)

$$\sin \frac{\pi}{n} \left[\sin \frac{\pi}{n} + 3 \sin \frac{3\pi}{n} + \ldots\ldots + (2n - 1) \sin \frac{2n-1}{n} \pi \right] = -n$$

(Aucune difficulté ne sera soulevée concernant le fait que Log $(x-e^{i\theta})$ est définie à $2\lambda\pi i$ près, la constante s'éliminant dans le calcul et l'intégrale définie considérée étant de plus réelle. La notation Log représente un logarithme népérien).

PROBLEME II :

On considère l'ensemble E des matrices $M(x) = \begin{pmatrix} \alpha(x) & \gamma(x) \\ \beta(x) & \delta(x) \end{pmatrix}$ satisfaisant à la relation

(1) $\quad M(x)M(y) = M(x+y)$

$\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$, $\delta(x)$ représentent des fonctions réelles, de la variable réelle x, continues et dérivables.

1) Les matrices M(x) et M(y) commutant, que peut-on dire de leurs vecteurs propres ?

2) En utilisant uniquement la propriété de commutation, montrer que les matrices M(x) sont de la forme :

$$M(x) = \begin{pmatrix} A(x) - p\,B(x) & q\,B(x) \\ r\,B(x) & A(x) + p\,B(x) \end{pmatrix}$$

où p, q, r sont trois constantes et A(x), B(x) deux fonctions de la variable x.

3) En utilisant ensuite la condition (1), calculer A(x+y) et B(x+y) en fonction de A(x), A(y), B(x), B(y).

On pose $\omega^2 = p^2 + qr$, ω pouvant être réel ou complexe.

a) On suppose $\omega \neq 0$

On pose $C(x) = A(x) + \omega B(x)$

$D(x) = A(x) - \omega B(x)$

Montrer que : $C(x+y) = C(x)\,C(y)$ et $D(x+y) = D(x)\,D(y)$

En déduire A(x) et B(x)

b) On suppose $\omega = 0$ Déterminer à nouveau A(x) et B(x)

4) Montrer que cette étude permet de retrouver les matrices de rotation plane.

5) Les matrices M(x) étant supposées diagonalisables, peut-on, en utilisant cette propriété, retrouver directement les résultats du paragraphe 3)a ?

6) On appelle dérivée de la matrice M(x) et l'on note M'(x) ou $\frac{dM(x)}{dx}$ la matrice

$$M'(x) = \frac{dM(x)}{dx} = \begin{pmatrix} \frac{d\alpha(x)}{dx} & \frac{d\gamma(x)}{dx} \\ \frac{d\beta(x)}{dx} & \frac{d\delta(x)}{dx} \end{pmatrix}$$

Montrer que la dérivée d'une somme (resp. du produit) de deux matrices M(x) de l'ensemble E satisfait aux règles habituelles de calcul de la dérivée d'une somme (resp. du produit) de deux fonctions.

En supposant la matrice M(x) régulière, à valeurs propres distinctes, peut-on établir une relation matricielle entre M(x) et $\frac{dM(x)}{dx}$ et retrouver ainsi les résultats du paragraphe 3)a ?

---

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail